Algorithmische Verfahren zur Darstellung von Primzahlen

von

Erich Landhäußer*

(I) Einleitung und Zusammenfassung:

Die Menge der ungeraden Zahlen läßt sich in 3 Klassen aufteilen Landhäußer [1], Euler [2], nämlich die Klasse der durch 3 teilbaren Zahlen, ferner in 2 Klassen,die aus den Rekursionsgleichungen (A) resultieren. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass sich mit Hilfe von Erzeugenden Funktionen $f_{(n)}$ aus den Basisgleichungen (A) in jeder der beiden Klassen endliche Primzahlfolgen $p_{(n)}$ bestimmen lassen; die Funktionen sind nicht bijektiv. Es ist fraglich, ob man unendlich viele Erzeugende benötigt, um eine Primzahlklasse darzustellen.

(II) Voraussetzungen

(1) Prim- und Nichtprimzahlen sind bekannt

(2) Es gelten die Basisgleichungen (Landhäußer [1])

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} n_5 = 5 + 6\sigma\,; 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, \cdots 5 - \mathit{Strang} \\ n_7 = 7 + 6\sigma\,; 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, \cdots 7 - \mathit{Strang} \end{cases} \quad \sigma = 0, 1, 2, \cdots$$

(3) erzeugende Funktionen $f_{(n)}, n = 0, 1, 2, \cdots$ produzieren mit einer Startprimzahl p_0 im jeweiligen Strang eine endliche Folge von Primzahlen $p_{(n)}$; deren Abbruch im allgemeinen durch ein Produkt erfolgt; die Entwicklung ist zu Ende, wie bei Euler entstehen Lücken zwischen den Primzahlen.

*Erich Landhäußer, Hünensand 45; 49716 Meppen; E-Mail: alandhae@gmx.de

In (A) sind Prim- und Nichtprimzahlen enthalten; gesucht sind Primzahlen; die funktionale Abhängigkeit ist durch das jeweilige $f_{(n)}$ bestimmt; die Folgen werden unterschiedliche Längen haben.

Beispiele: Aus dem 7-Strang die Primzahlen mit $f_{(n)}=6\mathrm{n}^2; n=0,1,2,3,\cdots$ und den Startprimzahlen $7,13,19,31,37,\cdots$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6n²	0	6	24	54	96	150	216	294	384	486
7+6n²	7	13	31	61	103	157	223	~~301~~	~~391~~	~~493~~
13+6n²	13	19	37	67	109	163	229	307	397	499
19+6n²	19	~~25~~	~~43~~	~~73~~	~~115~~	~~169~~	~~235~~	~~313~~	~~403~~	~~505~~
31+6n²	31	37	~~55~~	~~85~~	~~127~~	~~181~~	~~247~~	~~325~~	~~415~~	~~517~~
37+6n²	37	43	61	~~91~~	~~133~~	~~187~~	~~253~~	~~331~~	~~421~~	~~523~~
Arbeitet man abwärts im Strang, dann existiert ein Vorrat an f(n)										
17+6n²	17	23	41	71	113	167	233	311	401	503
11+6n²	11	17	~~35~~	~~65~~	~~107~~	~~161~~	~~227~~	~~305~~		
5+6n²	5	11	29	59	101	~~155~~	~~221~~			

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
6n²	600	726	864	1014	1176	1350	1536	1734	1944	2166
7+6n²	~~607~~	~~733~~	~~871~~	~~1021~~	~~1183~~	~~1357~~	~~1543~~	~~1741~~	~~1951~~	~~2173~~
13+6n²	613	739	877	~~1027~~	~~1189~~	~~1363~~	~~1549~~	~~1747~~	~~1957~~	~~2179~~
19+6n²	~~619~~	~~745~~	~~883~~	~~1033~~	~~1195~~	~~1369~~	~~1555~~	~~1753~~	~~1963~~	~~2185~~
31+6n²	~~631~~	~~757~~	~~895~~	~~1045~~	~~1207~~	~~1381~~	~~1567~~	~~1765~~	~~1975~~	~~2197~~
37+6n²	~~637~~	~~763~~	~~901~~	~~1051~~	~~1213~~	~~1387~~	~~1573~~	~~1771~~	~~1981~~	~~2203~~
Arbeitet man abwärts im Strang, dann existiert ein Vorrat an f(n)										
17+6n²	617	743	881	1031	1193	1367	1553			
11+6n²										
5+6n²										

Bemerkungen:

(1) Es ist $p_{(n)}=7+6n^2; n=0,1,\cdots 6$, $n=7$ liefert das Ende der Folge: $7+6\cdot 7^2=7\cdot(1+6\cdot 7)$, die Folge ist maximal ausgeschöpft, was immer der Fall ist; es kommt zum Abbruch. $n\geq 8$ kann Prim oder Nichtprim aus dem 7-Srtrang darstellen und ist daher nicht mehr zuverlässig; trotzdem müssen für das Funktionieren des Algorithmus alle nachfolgenden $n, f_{(n)}, n_7$ aufgeschrieben werden.

(2) Die Folge $17+6\mathrm{n}^2$ ist optimal dargestellt.

(3) Vorzeitiger Abbruch; die Differenz $\triangle$ zwischen den Primzahlen ist $31-19=12$.

(4) Wählt man $p_0^{(7)} - p_0^{(5)} = 2$ dann resultiert für die Spaltenfolge

$$\begin{pmatrix} p_0^{(5)} + 6n^2 \\ p_0^{(5)} + 2 + 6\mathrm{n}^2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} p_0^{(5)} \\ p_0^{(5)} + 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} p_0^{(5)} \\ p_0^{(5)} + 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} p_0^{(5)} + 6 \\ p_0^{(5)} + 8 \end{pmatrix} ; \cdots$$

Führt man „ad infinitum" durch unter Mitnahme nicht primer Zahlen, dann treten Spalten

(↑, ↓, ↕, |) auf. Beispielsweise für $p_0^{(5)} = 5$ die Folge

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} ; & \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix} ; & \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix} ; & \begin{pmatrix} 59 \\ 61 \end{pmatrix} ; & \begin{pmatrix} 101 \\ 103 \end{pmatrix} ; & \begin{pmatrix} 155 \\ 157 \end{pmatrix} ; & \begin{pmatrix} 221 \\ 223 \end{pmatrix} ; & \begin{pmatrix} 299 \\ 301 \end{pmatrix} ; \cdots \\ \updownarrow ; & \updownarrow ; & \updownarrow ; & \updownarrow ; & \updownarrow ; & \downarrow ; & \downarrow ; & | \quad ; \cdots \end{matrix}$$

interessiert man sich nur für Zwillinge, dann bricht die Folge bei $\begin{pmatrix} 101 \\ 103 \end{pmatrix}$ ab.

Mit Hilfe der Möbiusfunktionen [4] und deren Umkehrung lässt sich die Anzahlfunktion

nichtprimer Zahlen, die im Intervall $(\sqrt{x}, x)$ liegen berechnen, analog der konstruktiven Prozedur

beim „Sieb des Eratosthenes“.

Die Produkte der Spalten aus 5- und 7-Strang – es werden nicht alle zusammengesetzten Zahlen

wiedergegeben- liegen alle im 5-Strang und man findet:

$$\begin{aligned} \prod (N_{0,} n) = N_0 + f_{(n)} &= 35 + 6^2 (n^2 - 1) ; n = 1{,}2{,}3, \qquad \cdots \\ &= 35, \quad 143, \quad 323, \quad 575, \quad 899, \quad \cdots \\ &\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 \\ 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix}, \cdots \\ &\updownarrow, \quad \updownarrow, \quad \updownarrow, \quad \uparrow, \quad \updownarrow, \quad \cdots \end{aligned}$$

für die nichtabbrechende Produktfolge.

Setzt man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ x+2 \end{pmatrix} : x \cdot (x+2) = \prod (N_{0,} n) &= 35 + 6^2 (n^2 - 1) \\ x^2 + 2\mathrm{x} + 1 &= 36 + 6^2 (n^2 - 1) = 6^2 \cdot n^2 \\ (x+1)^2 &= 6^2 \cdot n^2 \\ x &= 6\mathrm{n} - 1 ; n = 1{,}2{,}3, \cdots \end{aligned}$$

x kann nur im 5-Strang auftreten und deshalb keine Mersenne-Zahl darstellen; da

$$(6n)-1=2^p-2 \Rightarrow 6n=2^p \Rightarrow n \notin \mathbb{N}_0 \quad ,$$

$x+2=6n+1=2^p-1$ dagegen läßt das Auftreten von Mersennestrukturen zu, da

$$6n=2^p-2=2\cdot(2^{p-1}-1) \Rightarrow n=\frac{2^{p-1}-1}{3} \in \mathbb{N}$$

Mit dieser Feststellung ist aber keine Entscheidung über „ 2^p-1 ist Primzahl " möglich.

Mittels der Möbius-Funktion kann man die Anzahl von Primzahlen unterhalb einer Grenze bestimmen, nicht aber ihre eigentlichen Werte, vgl. Bundschuh [4].

Literaturverzeichnis

[1] Erich Landhäußer, Dreiklassenteilung der Menge der ungeraden Zahlen, 2011
http://www.primzahlen.de/referenten/Erich_Landhaeusser/Dreiklassenteilung_der_Menge_der_ungeraden_Zahlen.pdf

[2] Leonhard Euler, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Berlin, p. 36, 1772.

[3] Weisstein, Eric W. "Prime-Generating Polynomial." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Prime-GeneratingPolynomial.html

[4] Peter Bundschuh, Einführung in die Zahlentheorie, S. 45-46, S. 288 , 4. Auflage 1990