Eine neue Methode zur Berechnung der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

2., bearbeitete und erweiterte Auflage, März 2008

von Werner D. Sand

Inhaltsverzeichnis

Abstract

Vorgestellt wird ein neues Verfahren zur Berechnung der Anzahl der Primzahlen bis x durch Summenbildung von Primzahlpotenzen. Die Idee ist: Die natürlichen Zahlen zählen sich selbst, die Primzahlen in gewisser Weise ebenfalls. Ergänzend zur 1. Auflage werden jetzt auch die Primzahlzwillinge bzw. k-Tupel erfasst. Zugleich wird das Verfahren in den Kontext bestehender Formeln gestellt.

Einleitung

Absicht dieses Aufsatzes ist die Darstellung einer neuen Methode zur Ermittlung der „Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ (Riemann). Dabei geht es nicht um Konkurrenz mit bestehenden Verfahren, sondern nur um Erkenntniszuwachs.

Sei $\pi(x)$ die bekannte Bezeichnung für die (genaue) Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x. Sei ferner $\log x$ der natürliche Logarithmus von x, zum Zwecke besserer Lesbarkeit dem vielleicht bekannteren $\ln x$ vorgezogen.

Zur Berechnung von $\pi(x)$ gibt es Näherungsformeln, von denen

$\pi(x) \sim x/\log x$	("Primzahlsatz", Gauß)
$\pi(x) \sim x/(\log x - 1)$	(Legendre u.a.)
$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$	(„Integrallogarithmus“, Gauß)
$\pi(x) \sim R(x)$	(Riemann)

die bekanntesten sind. Zur Erklärung der Formeln siehe Kapitel 6. Da

$$\log x \approx x \cdot \left(\sqrt[x]{x} - 1\right),$$

kann der Primzahlsatz auch in der Form

$$\pi(x) \sim \frac{1}{\sqrt[x]{x} - 1}$$

geschrieben werden und der Integrallogarithmus

$$\mathrm{Li}(x) = \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n}$$

in der Form

$$\mathrm{Li}(x) \approx \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{n \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)},$$

also

$$\pi(x) \sim \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{n \cdot \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)} .$$

Dabei besteht völlige Gleichheit zwischen beiden Formen, wenn auf Einer gerundet wird. Gewöhnlich wird Li(x) in Integralform dargestellt.

Das Zeichen ~ drückt asymptotische Gleichheit aus, d.h. der Quotient aus beiden Seiten der Gleichung geht gegen 1 für x gegen Unendlich. Dabei geht die (absolut genommene) *Differenz* der Seiten der Gleichung gegen *Unendlich*, was meistens verschwiegen wird und den Näherungsformeln von vornherein eine nur grundsätzliche Bedeutung verleiht. Die Formeln sind geeignet für das theoretische Verständnis und das Abschätzen von Größenordnungen; ein genaues Bestimmen von Anzahlen darf man von ihnen nicht erwarten. Wenn in der Literatur von „zunehmender Genauigkeit mit wachsendem x" die Rede ist, dann bedeutet das immer zunehmende *relative* Genauigkeit. Bei den Formeln haben wir also geringe (absolute) Genauigkeit bei geringem Zeitaufwand.

Von Formeln im engeren Sinn sind zu unterscheiden Ausdrücke, die z.B. Summen- oder Produktbildung enthalten und die man eher als „Algorithmen" oder „Rechenvorschriften" bezeichnen sollte. Vereinfachend werden aber auch solche Gebilde meist „Formeln" genannt. Beispiele sind der Integrallogarithmus und die Riemannsche Formel. Der Algorithmus von Hardy aus dem Jahre 1979 zählt die Primzahlen sogar genau. Bei näherem Hinsehen sind diese Algorithmen mehr oder weniger ein Abzählen. Das hier vorgestellte Verfahren ist eine Mischform.

1. Die ursprüngliche Form

Der „ideale" Algorithmus zur Ermittlung der Anzahl von Primzahlen besteht in ihrem Abzählen. Hier haben wir größte Genauigkeit, gepaart mit größtem Zeitaufwand. Darf es etwas ungenauer sein, so geht es auch schneller. An dieser Stelle ist ein Beitrag von „Sabine" hilfreich, die im Forum der Deutschsprachigen Primzahlenseite mit folgender Überraschung aufwartete (nicht wörtlich):

Die Anzahl der Primzahlen bis x ist ungefähr (d.h. asymptotisch) gleich der Summe der Primzahlen bis zur Quadratwurzel aus x. Anders gesagt:

Behauptung. Die Summe der Primzahlen bis x ist ungefähr gleich der Anzahl der Primzahlen bis x^2. Also:

(1.1)
$$\sum_{2}^{x} p \sim \pi\left(x^2\right)$$

Hier ist p kleiner oder gleich x. Genauer wird die Formel, wenn x Primzahl ist:

(1.2) $$\sum_{i=1}^{n} p_i \sim \pi\left(p_n^2\right)$$

Ein paar Beispiele zeigen die Richtigkeit des Verfahrens:

x	$\sum_{2}^{x} p$	π(x²)	∑/π
10^1	17	25	0.68
10^2	1060	1229	0.8624898291...
10^3	76127	78498	0.9697954088...
10^4	5736396	5761455	0.9956505778…
10^5	454396537	455052511	0.9985584653...
10^6	37550402023	37607912018	0.9984708008...
10^7	3203324994356	3204941750802	0.9994955426…
10^8	279209790387276	279238341033925	0.9998977551...

Es herrscht also asymptotische Gleichheit zwischen der genäherten und der tatsächlichen Anzahl der Primzahlen.

Beweis. Bei Vorüberlegungen zum Beweis fiel mir die Ähnlichkeit der Vermutung mit

(1.3) $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

auf. D.h.: Die Summe der ungeraden Zahlen bis n ist gleich n². Man kann auch sagen: Die Summe der ungeraden Zahlen bis n ist gleich der Anzahl der natürlichen Zahlen bis n². Also auch hier eine Beziehung zwischen Summe und Anzahl und die Erhöhung des Grades um 1 (von n auf n²). Der Unterschied zu den Formeln (1.1) und (1.2) besteht nur noch in dem Unterschied zwischen ungeraden Zahlen und Primzahlen.

Zum Beweis gehen wir aus von dem eingangs vorgestellten „Primzahlsatz“: $\pi(x) \sim x/\log x$. Er wurde mehrmals bewiesen (zuerst 1896 von Hadamard und de la Vallée-Poussin) und ist daher ein sicheres Fundament für unseren Beweis.

Ferner kann man die (arithmetisch) durchschnittliche Größe $p\phi$ der Primzahlen bis x mit

(1.4) $$p\phi \sim \frac{x}{2}$$

annehmen. Der Fehler ist nicht sehr groß, da die Primzahlen sich ziemlich linear entwickeln, wie ein Blick auf den Grafen von π(x) zeigt. Anders gesagt: Die Ausdünnung der Primzahlen geht sehr langsam vor sich. Der genaue Wert von pø ist etwas kleiner als x/2 und nähert sich diesem asymptotisch mit wachsendem x.

Die Summe der Primzahlen bis x entsteht jetzt durch einfache Multiplikation der Anzahl mit der durchschnittlichen Größe:

(1.5) $$\sum_{2}^{x} p \sim \frac{x}{\log x} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2 \cdot \log x} = \frac{x^2}{\log x^2} \sim \pi\left(x^2\right)$$

Das Ergebnis ist nach Primzahlsatz die Anzahl der Primzahlen bis x², was zu beweisen war.

Ein anderer Beweis geht aus von der Summenformel für die natürlichen Zahlen

$$\sum_{k=1}^{x} k = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \cdot$$

Wir „verkürzen“ sie logarithmisch nach Primzahlsatz, d.h. wir wählen von den x natürlichen Zahlen die π(x) Primzahlen aus. Ihre Anzahl beträgt ca. x/log x . Die rechte Seite wird dann ebenfalls in diesem Verhältnis verkürzt. Vorher sparen wir uns noch den Summanden x/2, da er für die grobe Ordnung entbehrlich ist. Wir erhalten wieder

(1.6) $$\sum_{2}^{x} p \sim \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{\log x} = \frac{x^2}{\log x^2} \sim \pi(x^2).$$

2. Erweiterung und Verallgemeinerung: Sandsches Summationstheorem

Wie schon angedeutet, stehen Summe und Anzahl eines Polynoms natürlicher Zahlen in einem dimensionalen Verhältnis: Ist das Polynom vom Grad n, so das Anzahl-Intervall vom Grad n+1. Das findet seinen deutlichsten Ausdruck in der Integrationsformel

(2.1) $$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{für} \quad n \neq -1$$

Auch die Summenformeln selbst lassen diese Beziehung erkennen:

(2.2)

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + O\left(n^{m-1}\right)$$

Die letzte, allgemeine Formel enthält ein Restglied, das sich aus m-1 Summanden mit Binomialkoeffizienten und Bernoullischen Zahlen zusammensetzt, die wir uns hier lieber ersparen wollen. Wie gesagt, verstehen wir die rechte Seite der Gleichungen immer als Anzahl natürlicher Zahlen.

Es liegt nahe, die Entsprechungen für Primzahlen zu bilden:

(2.3)

$$\sum p = O\left(\pi(p^2)\right)$$

$$\sum p^2 = O\left(\pi(p^3)\right)$$

$$\sum p^3 = O\left(\pi(p^4)\right)$$

usw., allgemein:

$$\sum p^n = O\left(\pi(p^{n+1})\right)$$

Zur Verallgemeinerung der Vermutung (1.1) ist es jetzt nur noch ein Schritt („Sandsches Summationstheorem“):

Die Summe der n-ten Primzahlpotenzen kleiner oder gleich x ist asymptotisch gleich der Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x^{n+1}:

(2.4)
$$\sum_{p=2}^{x} p^n \sim \pi\left(x^{n+1}\right)$$

Oder: Die Anzahl der Primzahlen bis x ist asymptotisch gleich der Summe der n-ten Potenzen der Primzahlen bis $x^{1/(n+1)}$:

(2.5)
$$\pi(x) \sim \sum_{p=2}^{x^{1/(n+1)}} p^n$$

3. Beispiele und Verifikationen

Am Beispiel $x=10^{16}$ soll die Genauigkeit der Formel 2.5 in Abhängigkeit von n untersucht werden:

$$\sum_{p=2}^{10^{16}} 1 = \pi\left(10^{16}\right) =$$ 279.238.341.033.925 genauer Wert, „Abzählen“

$$\sum_{p=2}^{10^{8}} p =$$ 279.209.790.387.276

$$\sum_{p=2}^{10^{16/3}} p^2 =$$ 278.959.908.085.255

$$\sum_{p=2}^{10^{4}} p^3 =$$ 279.351.181.974.090

$$\sum_{p=2}^{10^{16/5}} p^4 =$$ 282.984.841.298.409

$$\sum_{p=2}^{10^{16/6}} p^5 =$$ 302.727.488.671.143

Wie man sieht (1.Zeile), kann man n schon bei Null beginnen lassen:

$$\sum_{p=2}^{x} p^0 = \sum_{p=2}^{x} 1 = \pi(x)$$

und erhält, wie schon angedeutet, die Anzahl der Primzahlen *genau*, allerdings bei maximalem Zeitaufwand („Abzählen“). Verfolgt man die Liste nach unten, so nimmt die Genauigkeit ab (bei ebenfalls abnehmendem Zeitaufwand). Die Liste findet ihr Ende, wo $10^{16/n+1}$ = 2 wird, also bei n = 52. Dann ist $\Sigma p^{52} = 2^{52} =$ 4.503.599.627.370.496. Das ist die schnellste, aber auch die ungenaueste „Näherung“. Zwischen n=0 und n=52 unterliegt die Genauigkeit starken Schwankungen. Für den praktischen Nutzen wäre abzuwägen, bei welchem n ein vernünftiges Verhältnis zwischen Genauigkeit und Zeitaufwand vorliegt. Das ist z.T. Geschmackssache; in unserem Beispiel würde ich n=3 oder 4 wählen. Der Zeitaufwand nimmt zwischen n=1 und n=3 stark ab, danach kaum noch. Der Fehler bei n=3 gegenüber dem faktischen Wert (n=0) beträgt 0,04%.

Zusammenfassung:

$$\pi(x) \sim \sum_{p=2}^{x^{1/(n+1)}} p^n$$

ergibt mindestens für n = 0,1,2,3,4 brauchbare Formeln für die Ermittlung der Anzahl der Primzahlen bis x (s.a. Tabelle Kap. 6). Wieweit sich diese Beobachtungen verallgemeinern lassen, bleibt zu untersuchen.

4. Beweis des Summationstheorems

Satz:

$$\sum_{p=2}^{x} p^n \sim \pi\left(x^{n+1}\right) \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis: Wir gehen aus von der Summenformel (2.2) in ihrer allgemeinen Form:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + O(n^{m-1}),$$

wobei der 2. und 3. Summand ohne Auswirkung auf die Hauptordnung der Gleichung vernachlässigt werden können. n wird zu x; m wird zu n:

(4.1)
$$\sum_{k=1}^{x} k^n \sim \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Wir verkürzen wieder logarithmisch nach Primzahlsatz, d.h. wir wählen von den x natürlichen Zahlen die π(x) ~ x/log x Primzahlen aus (d.h. wir multiplizieren mit der Dichte) und fassen zusammen:

(4.2)
$$\sum_{p=2}^{x} p^n \sim \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{\log x} = \frac{x^{n+1}}{\log(x^{n+1})} \sim \pi(x^{n+1}),$$

w.z.b.w.

5. Weitere Verallgemeinerung

Gehen wir von $n \in N_0$ zu $r \in R_0^+$ über, so gelangen wir zu *Satz*

(5.1)
$$\sum_{p \le x} p^r \sim \pi\left(x^{r+1}\right).$$

Der Beweis verläuft analog zu n.

1. Beispiel: r = 1,5

x	$\sum_{p<=x} p^r$	$\pi\left(x^{r+1}\right)$	$\sum/\pi$
10^1	37.72517861	65	0.5803873632
10^2	8143.985693	9592	0.8490393758
10^3	1893442.417	1951958	0.9700221096
10^4	453736185.7	455052511	0.9971073112

2. Beispiel: r = log 2 = 0.6931471806...

10^1	10.66242971	15	0.7108286473
10^2	315.2843774	360	0.8757899372
10^3	10971.55199	11307	0.9703327134
10^4	405819.5106	407983	0.9946971089
10^5	15827149.88	15854441	0.9982786451

Da die Primzahlen bzw. die zu untersuchenden Intervalle nur im positiv Reellen definiert sind, endet hier die Möglichkeit von Verallgemeinerungen. David Broadhurst machte mich darauf aufmerksam, dass r auch noch im Negativen (r > -1) möglich und sinnvoll ist.

6. Gegenüberstellung einiger Verfahren zur Ermittlung der Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

Vorausgeschickt sei, dass

$$\mathrm{Li}(x) = \sum_{2}^{x} \frac{1}{\log n}$$

$$R(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{n}(x)}{n \cdot n! \cdot \zeta(n+1)}$$, wobei $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n}}$ die Riemannsche Zeta-Funktion ist,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x - 1}$$ auf Legendre zurückgeht, der noch anstelle der 1 im Nenner den Wert

1,08366 verwendete.

$$S1(x) = \sum_{2}^{\sqrt{x}} p \qquad\qquad S2(x) = \sum_{2}^{\sqrt[3]{x}} p^{2}$$

Die Werte in den Spalten 2., 3. wurden auf Einer gerundet.
Die Werte in den Spalten 1., 4., 5. wurden du Sautoy (S. 116) entnommen.
Die Werte in den Spalten 6.,7. wurden mit MuPAD berechnet.

Unter „Bemerkungen" wird die Formel genannt, der S1 bzw. S2 am nächsten kommt. Es sollen hier also S1 und S2 in den Zusammenhang bestehender Formeln gestellt werden. Dass die Si mit wachsendem i tendenziell ungenauer werden, wurde schon gesagt, lässt sich aber an dieser Tabelle nicht oder kaum ablesen. Dass im Allgemeinen x/log x die ungenauesten und R(x) die genauesten Werte liefert, ist bekannt.

Gegenüberstellung:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	
x	π(x)	x/log x	x/(log x-1)	Li(x)	R(x)	S1(x)	S2(x)	Bem.
10^1	4	4	8	6	5	5	4	5,2
10^2	25	22	28	29	26	17	13	2,2
10^3	168	145	169	177	168	160	87	5,2
10^4	1.229	1.086	1.218	1.245	1.227	1.060	1.027	2,2
10^5	9.592	8.686	9.512	9.629	9.587	9.206	10.466	3,4
10^6	78.498	72.382	78.030	78.627	78.527	76.127	65.796	3,2
10^7	664.579	620.421	661.459	664.917	664.667	642.869	609.586	3,2
10^8	5.761.455	5.428.681	5.740.304	5.762.208	5.761.552	5.736.396	5.860.205	3,4
10^9	50.847.534	48.254.942	50.701.542	50.849.234	50.847.455	50.481.978	49.345.379	3,2
10^{10}	455.052.511	434.294.482	454.011.971	455.055.614	455.050.683	454.396.537	455.139.960	3,4
10^{11}	4.118.054.813	3.948.131.654	4.110.416.301	4.118.066.400	4.118.052.495	4.108.749.732	4.048.935.205	3,3
10^{12}	37.607.912.018	36.191.206.825	37.550.193.650	37.607.950.280	37.607.910.542	37.550.402.023	37.546.387.960	3,3
10^{13}	346.065.536.839	334.072.678.387	345.618.860.221	346.065.645.810	346.065.531.066	345.842.863.160	343.650.297.652	3,3
10^{14}	3.204.941.750.802	3.102.103.442.166	3.201.414.635.781	3.204.942.065.692	3.204.941.731.602	3.203.324.994.356	3.183.524.214.008	5,3
10^{15}	29.844.570.422.669	28.952.965.460.217	29.816.233.849.001	29.844.571.475.288	29.844.570.495.887	29.841.977.261.093	29.822.760.083.883	5,3
10^{16}	279.238.341.033.925	271.434.051.189.532	279.007.258.230.820	279.238.344.248.557	279.238.341.360.977	279.209.790.387.276	278.959.908.085.255	5,3

Sowohl die S1- als auch die S2-Werte scheinen sich mit wachsendem x relativ zu verbessern. Im Allgemeinen stehen S1 und S2 qualitativ zwischen Legendre und Riemann. Die Liste um die S3- und S4-Werte und in höhere x-Bereiche zu erweitern, ist sicher eine interessante Aufgabe.

7. Ausweitung des Verfahrens auf Primzahlzwillinge

Wenn wir die Primzahl*zwillinge* einem ähnlichen Verfahren unterziehen wollen wie die „Singles“, so gehen wir davon aus, dass es unendlich viele von ihnen gibt, was vorläufig noch eine Vermutung ist: ein Beweis steht noch aus. Dass es für die Anzahl der Zwillinge ebenso Formeln gibt wie für die einfachen Primzahlen, ist kein Beweis für ihre Unendlichkeit. Definiert ist ein Primzahlzwilling durch den Abstand d=2 zwischen benachbarten Primzahlen: d=q-p=2, p<q. (2,3) ist also kein Zwilling. Wir bezeichnen die Anzahl der Primzahlzwillinge unter x mit π_2 (x). Ihre einfachste Formel lautet

(7.1)
$$\pi_2(x) \sim \frac{x}{(\log x)^2}$$

Das ist leicht einzusehen, wenn man vom Primzahlsatz ausgeht und an der Stelle x eine zusätzliche Primzahl fordert. Die Gesamtwahrscheinlichkeit für 2 Primzahlen an der Stelle x beträgt dann $1/(\log x)^2$. Genau genommen beträgt sie etwas mehr, denn wenn x Primzahl ist, kann entweder x+2 oder x-2 ebenfalls prim sein. Dem wird Rechnung getragen durch eine „Primzahlzwillingskonstante“ $c_2 = 0{,}66016\ldots$, so dass die Formel jetzt etwas genauer heißt:

(7.2)
$$\pi_2(x) \sim 2 \cdot c_2 \cdot \frac{x}{(\log x)^2}$$

Es gibt entsprechend den einfachen Primzahlen noch andere, genauere Formeln, deren Behandlung hier zu weit führen würde. Man lese nach, was z.B. Hardy und Littlewood über die Anzahl von k-Tupeln herausgefunden haben; es entspricht dem für die einfachen Primzahlen geltenden Integrallogarithmus. Es sei schon an dieser Stelle gesagt, dass die Genauigkeit des Sandschen Summationstheorems zwischen der Formel 7.2 und der Formel von Hardy und Littlewood liegt.

Es muss noch geklärt werden, was wir eigentlich zählen, wenn wir Primzahlzwillinge zählen. Der Zwilling wird als Einheit betrachtet, als Dupel, also nur einmal gezählt. Da wir offenbar vorhaben, Zwillinge zu addieren, fragen wir nach dem Wert des einzelnen Zwillings. Da bietet sich der kleinere der beiden Partner an (p) oder der größere (q) oder der arithmetische Mittelwert (m). Eigentlich ist es für unsere Aussage unerheblich, was wir wählen, aber wir müssen uns entscheiden, also wählen wir unparteiisch m. Summe von Zwillingen heißt also hier Summe ihrer Mittelwerte m=(p+q)/2.

Nach diesen Vorbereitungen jetzt die

Vermutung. Die Anzahl der Primzahlzwillinge unter x ist asymptotisch gleich der halben Summe der Primzahlzwillinge unter Wurzel aus x:

(7.3)
$$\pi_2(x) \sim \frac{1}{2} \cdot \sum_{4}^{\sqrt{x}} m$$

Auch hierfür ein paar Belege, verbunden mit einem Vergleich mit Formel 7.1:

x	$\pi_2(x)$	$x/(\log x)^2$	$\sum m/2$ ($m<\sqrt{x}$)	$\sum/\pi_2$
10^1	2	2	0	0
10^2	8	5	5	0.625
10^3	35	21	35	1
10^4	205	118	122	0.59512195…
10^5	1224	754	1322	1.08006535…
10^6	8169	5239	6059	0.74170645…
10^7	58980	38492	52631	0.89235334…
10^8	440312	294706	431603	0.98022084…
10^9	3424506	2328539	3310013	0.96656656…
10^{10}	27412679	18861170	27278642	0.99511040…
10^{11}	224376048	155877436	222430448	0.99132884…
10^{12}	1870585220	1309803451	1856091662	0.99225185…
10^{13}	15834664872	11160455444	15900559214	1.00416139…
10^{14}	135780321665	96230457659	136419649148	1.00470854…
10^{15}	1177209242304	838274208941	1176717615908	0.99958237…
10^{16}	10304195697298	7367644414516	10301443659233	0.99973292…

Einen Beweis für die Zwillingsversion meines Theorems kann ich noch nicht anbieten.

8. Ausweitung des Verfahrens auf k-Tupel

Sei k eine beliebige, aber feste natürliche Zahl > 0. Unter k-Tupel verstehen wir dann eine Menge von k fortlaufenden Primzahlen, wobei die Differenz zwischen der größten und der kleinsten ein Minimum ist. Dabei ist die Differenz geradzahlig und soll mehr als nur 1 Tupel erzeugen. Es wird angenommen, dass dann unendlich viele Tupel erzeugt werden. (2,3) ist also kein Zwilling und (3,5,7) kein Drilling. Die einfachen Primzahlen sind 1-Tupel, die Zwillinge 2-Tupel. Nach der Struktur der Tupel wird hier nicht unterschieden; d.h. z.B. (5,7,11) und (7,11,13) sind unterschiedslos Drillinge.

Eine Ausweitung des Verfahrens auf k-Tupel mit k≧1 erfordert einen Faktor c in

(8.1)
$$\pi_k(x) \sim c \cdot \sum_{m<\sqrt{x}} m$$

mit m = arithmetischer Mittelwert der am Tupel beteiligten Primzahlen. Vermutlich ist

(8.2)
$$c = \frac{1}{2^{k-1}} = 2^{1-k} \ .$$

Analog zu den Primzahlpotenzen ist c sicher verifizierbar für k=1 bis 4; ab k=5 streuen die Ergebnisse erheblich, verständlich wegen der zunehmenden Ausdünnung der Tupelverteilung.

Es bleibt zu untersuchen die Summenbildung von Primzahlpotenzen ab dem Grade 2, wie wir sie bei den einfachen Primzahlen vorgenommen haben: wie brauchbar ist z.B.

(8.3)
$$\pi_2(x) \sim \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{m<\sqrt[3]{x}} m^2 \qquad ?$$

Ein Verifikationsversuch für $x=10^2$ bis 10^{16} ergibt kein klares Bild: die Quotienten $\sum/\pi_2$ liegen zwischen 0,7 und 1,7, ohne eindeutige Tendenz - eine Aufgabe für stärkere Computer und Programme. Bei den einfachen Primzahlen sahen wir bereits, dass die Quotienten mit steigender Primzahlpotenz zunehmen; vermutlich ist es bei den k-Tupeln 2. und höheren Grades ebenso. Das besagt aber nichts gegen die theoretische Richtigkeit einer verallgemeinerten Vermutung zumindest für die Primzahlzwillinge:

(8.4)
$$\pi_2(x) \sim \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{m=4}^{x^{\frac{1}{n+1}}} m^n$$

Fassen wir alles bisher Gesagte zusammen, so erhalten wir die Gesamtvermutung:

(8.5)
$$\pi_k(x) \sim \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \sum_{m<x^{1/(r+1)}} m^r \qquad \text{oder}$$

(8.6)
$$\pi_k(x^{r+1}) \sim \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \sum_{m<x} m^r$$

mit reellem r ≥ 0.

9. Schlusswort

Die sinnvolle Summation von Primzahlen und Primzahlpotenzen ist damit sicher noch nicht zu ihrem Ende gekommen. Z.B. scheint sich das Verfahren auch auf „Primte Primzahlen“ (Primzahlen mit primem Index) anwenden zu lassen. Ich bitte Interessierte, sich mit Ideen und eigenen Entdeckungen zu beteiligen. Ich bitte ferner, mich über vielleicht noch vorhandene Fehler in diesem Skript zu informieren. Verständnisfragen beantworte ich gerne. Ich bitte vor allem, mich auf andere Arbeiten auf diesem Gebiet hinzuweisen, die vielleicht mit anderen Mitteln unternommen wurden und die mir entgangen sind. Ich hoffe, dass es mir gelungen ist, etwas von der Faszination zu vermitteln, die in der Addition von Zahlen liegt, die eigentlich zum Multiplizieren gemacht sind, siehe Goldbachsche Vermutung. Eigentlich wird ja Mathematik erst so richtig spannend, wenn man sie ein bisschen gegen den Strich bürstet.

Literatur

Bundschuh, Peter: Einführung in die Zahlentheorie. 4. Aufl. Springer, 1998.
Du Sautoy, Marcus: Die Musik der Primzahlen. 3. Aufl. C.H.Beck, 2004.
Herrmann, Dietmar: Algorithmen-Arbeitsbuch. Addison-Wesley, 1992.
Hardy-Littlewood siehe: http://mathworld.wolfram.com/k-TupleConjecture.html

E-Mail: Werner.Sand@web.de