Um die Zahl der Primzahlen in einem vorgegebenen Intervall zu berechnen, konnte ich folgenden Zusammenhang über die Zahl der zusammengesetzten Zahlen beschreiben:

Die Funktion $\gamma(n, p_i)$ beschreibt Anzahl der zusammengesetzten Zahlen kleiner gleich n, welche mindestens 1 Primteiler $p \leq p_i$ besitzen, wobei p_i maximal $p_{\max} \leq \sqrt{n}$ sein darf.

Bei $p_i < p_{\max}$ wird die Funktion mit p_i berechnet, bei $p_i \geq p_{\max}$ ist die Funktion mit $p_{\max}$ zu berechnen. Errechnet sich dabei $p_i < 3$ gilt $p_i = p_1 = 2$.

$$\gamma(n, p_i) = \sum_{p_1=2}^{p_i} \left(\left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor - i \right) - \sum_{p_2=3}^{p_i} \left(\gamma\left(\left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor, p_{i-1} \right) \right)$$

Die Überlegung zu dieser Funktion erscheint mir mit dem **Legendre-Eratosthenes Sieb (http://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_sieve)** identisch, nur das nicht die Zahl der teilerfremden (i.e. Primzahlen) sondern die Zahl der zusammengesetzten Zahlen ausgegeben wird. Der Ausdruck für die Primzahlfunktion ist also:

$$\# p(n) = n - \gamma(n, p_{\max}) - 1$$

Der Term „-1“ korrigiert für die Zahl „eins“, die weder Primzahl noch zusammengesetzte Zahl ist.

Bedingungen, Definitionen:

$n \in N$, Primzahlen: $p \in P$ mit $p_i \leq p_{\max} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

für $x < 3$ gilt $\gamma(n, x) = \gamma(n, 2) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$,

für $x > \sqrt{n}$ gilt $\gamma(n, x) = \gamma(n, p_{\max}) = \gamma(n, \lfloor \sqrt{n} \rfloor)$

Die Funktion ist also die Summe der Anzahl aller Zahlen bis n, welche sich durch p_i teilen lassen ($+\left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor$), wobei eine Korrektur erfolgen muss um die Anzahl der Primzahlen bis einschließlich p_i $(-i)$. Ferner ist zu korrigieren um die Zahlen, die sich durch p_i und mindestens einen weiteren Teiler p_{i-x} teilen lassen ($-\gamma(\left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor, p_{i-1})$)

Diskussion der Funktion:

Der Ausdruck $\left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor$ steht immer für eine ganze Zahl $m \in N$ mit $m \leq \frac{n}{p_i}$, ist also zu runden.
Ebenso ist $\sqrt{p_i}$ zu runden mit $p_{\max} \in P$ und $p_{\max} \leq \sqrt{n}$.

Mit diesen Rundungen ist die Funktion genau!

Auf der Suche nach der Zahl der Primzahlen in einem Intervall stellte sich die Frage, ob diese Funktion Hinweise oder gar Beweise erlaubt:
Das interessante an dieser Funktion ist, dass sich für den Korrekturterm $(-\gamma(\left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor, p_{i-1})$ ein

$p_{\max} = \sqrt[3]{n}$ ergibt. Es wird also für einen Großteil der Primzahlen nicht korrigiert.

Es findet sich bis $n^2 = 10^{16}$ (soweit reicht die Rechenkapazität meiner Programme) eine wohl lineare Regression:

Die Zahl der Primzahlen im Intervall $[n\text{^}2, (n+1)\text{^}2]$ korreliert mit der Differenz der Zahlen der Primzahlen bis n und der Zahlen der Primzahlen bis $\sqrt[3]{n^2}$.

$$\#p[n^2, (n+1)^2] \sim \#p[0, n] - \#p\left[0, \sqrt[3]{n^2}\right]$$

Der Korrelationskoeffizient liegt bei 1,05 mit einem r > 0,9999.

Ist das Zufall oder beweisbar?

Dr. Carsten Neumann
29.12.2009